LOGARİTMİ - PROPRİETĂȚİ

Să se rezolve ecuațiile:

$2^x = 2^2$	$2^x = 8$
$2^x = 2^5$	$3^x = 9$
$3^x = 3^1$	$3^x = 27$
$3^x = 3^6$	$3^x = 81$
$5^x = 5^7$	$5^x = 25$
$2^x = 4$	$5^x = 125$

Dacă ne-am amintit cum rezolvăm ecuațiile $2^x = 2^2$, $2^x = 4$, ne întrebăm cum rezolvăm ecuații de tipul:

$2^x = 3$	$2^x = 0{,}3$
$2^x = -5$	$2^x = \sqrt{2}$
$2^x = \frac{2}{3}$	$2^x = -\sqrt{3}$
$2^x = -\frac{5}{7}$	

Deci ecuația $5^x = 3$ cum o rezolvăm? Are această ecuație soluție? Dacă da, care este aceasta?

Îl putem afla pe x astfel încât această ecuație să aibă soluție?

Da. Pentru aceasta va trebui să introducem o noțiune nouă și anume: noțiunea de logaritm.

Definiție: Fie a și b două numere reale strict pozitive, $a \neq 1$.

Se numește logaritm în baza a din b, se notează: $\log_a b$, și se citește " logaritm în baza a din b", numărul real unic, soluție a ecuației $a^x = b$.

$$\boxed{a^x = b \quad <=> \quad \log_a b = x}$$

Deci

$2^x = 4 \ <=> \ x = \log_2 4$ verificare: $2^{\log_2 4} = 4$

$2^x = 8 <=> x = \log_2 8$ verificare: $2^{\log_2 8} = 8$

$3^x = 3 \ <=> \ x = \log_3 3$ verificare: $3^{\log_3 3} = 3$

$3^x = 9 \ <=> \ x = \log_3 9$ verificare: $3^{\log_3 9} = 9$

Identitatea fundamentală: $\boxed{a^{\log_a b} = b}$: $2^{\log_2 4} = 4$; $2^{\log_2 8} = 8$, $3^{\log_3 9} = 9$

Proprietăți:

1. $\boxed{\log_a 1 = 0}$ $\Leftrightarrow$ $a^0 = 1, a \neq 1, a > 0$

Exemple: $\log_2 1 = 0, \log_3 1 = 0, \log_5 1 = 0, \log_{\frac{2}{3}} 1 = 0, \log_{\sqrt{2}} 1 = 0$

2. $\boxed{\log_a a = 1}$ $\Leftrightarrow$ $a^1 = a, a \neq 1, a > 0$

Exemple: $\log_2 2 = 1, \log_3 3 = 1, \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} = 1, \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$

3. $\boxed{\log_a A^n = n \log_a A}$, $a \neq 1$ și $a > 0, A > 0$

Exemple:

a) $\log_a A^3 = 3 \log_a A,$
b) $\log_2 3^5 = 5 \log_2 3$,
c) $\log_3 2^7 = 7 \log_3 2,$
d) $\log_3 5^{-4} = -4 \log_3 5$
e) $\log_3 7^{-5} = -5 \log_3 7$
f) $\log_2 3^{\frac{5}{7}} = \frac{5}{7} \log_2 3$
g) $\log_2 3^{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \log_2 3$
h) $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$
i) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$
j) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$
k) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2 \log_5 5 = 2 \cdot 1 = 2$
l) $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \log_3 3 = 3 \cdot 1 = 3$

4. $\boxed{\log_a A \cdot B = \log_a A + \log_a B}$, $a \neq 1, a > 0, A > 0, B > 0$

Exemple:

- $\log_2 3 \cdot 5 = \log_2 3 + \log_2 5$
- $\log_2 7 \cdot 5 = \log_2 7 + \log_2 5$
- $\log_2 5^3 \cdot 7^4 = \log_2 5^3 + \log_2 7^4 = 3 \log_2 5 + 4 \log_2 7$
- $\log_5 2^4 \cdot 3^4 = \log_5 2^4 + \log_5 3^4 = 4 \log_5 2 + 4 \log_5 3$

5. $\boxed{\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B}$, $a \neq 1, a > 0, A, B > 0$

Exemple:

- $\log_3 \frac{2}{5} = \log_3 2 - \log_3 5$
- $\log_5 \frac{7}{3} = \log_5 7 - \log_5 3$
- $\log_4 \frac{3}{5} = \log_4 3 - \log_4 5$

- $\log_6 \frac{5}{7} = \log_6 5 - \log_6 7$
- $\log_3 \frac{3}{4} = \log_3 3 - \log_3 4 = 1 - \log_3 2^2 = 1 - 2 \log_3 2$
- $\log_5 \frac{25}{8} = \log_5 25 - \log_5 8 = \log_5 5^2 - \log_5 2^3 = 2 \log_5 5 - 3 \log_5 2$
  $= 2 \cdot 1 - 3 \log_5 2 = 2 - 3 \log_5 2$

6. $\boxed{\log_a \frac{1}{A} = -\log_a A}$, $a \neq 1, a > 0, A > 0$

Exemple:

- $\log_2 \frac{1}{3} = -\log_2 3$
- $\log_5 \frac{1}{7} = -\log_5 7$
- $\log_7 \frac{1}{5} = -\log_7 5$
- $\log_2 \frac{1}{8} = -\log_2 8 = -\log_2 2^3 = -3 \log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$

7. $\boxed{\log_a \sqrt[m]{A^n} = \frac{n}{m} \log_a A}$, $a \neq 1, a > 0, A > 0, m, n > 0$

Exemple:

Reamintim: $\sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{n}{m}}$: $\sqrt[3]{2^7} = 2^{\frac{7}{3}}$, $\sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{3^1} = 3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$

- $\log_3 \sqrt[2]{5^7} = \log_3 5^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2} \log_3 5$
- $\log_5 \sqrt[3]{2^7} = \log_5 2^{\frac{7}{3}} = \frac{7}{3} \log_5 2$
- $\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

FİȘA DE LUCRU

LOGARİTMİ PROPRİETĂȚİ

1. Folosind identitatea fundamentală: $\boxed{a^{\log_a b} = b}$ și formula puterea unei puteri: $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$

calculați:

a) $2^{\log_2 5} =$
b) $2^{\log_2 25} =$
c) $2^{3\log_2 5} =$
d) $2^{2\log_2 3} =$
e) $3^{3\log_3 2} =$
f) $3^{2\log_3 4} =$
g) $5^{3\log_5 2} =$
h) $5^{2\log_5 4} =$
i) $7^{3\log_7 5} =$
j) $4^{\log_2 5} =$
k) $8^{\log_2 3} =$
l) $25^{2\log_5 3} =$
m) $25^{3\log_5 2} =$
n) $125^{\log_5 4} =$
o) $64^{\log_4 3} =$
p) $49^{2\log_7 25} =$

2. Folosind proprietățile logaritmilor calculați:

a) $\log_2 3 \cdot 7 =$
b) $\log_3 2 \cdot 5 =$
c) $\log_5 3 \cdot 6 =$
d) $\log_2 3 \cdot 7 \cdot 5 =$
e) $\log_2 3 \cdot 5 \cdot 2 =$
f) $\log_4 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$
g) $\log_2 4^3 \cdot 3^5 =$
h) $\log_3 16 \cdot 9 \cdot 25 =$
i) $\log_4 64 \cdot \frac{1}{3} =$
j) $\log_3 \frac{2}{3} \cdot 9 =$
k) $\log_5 \frac{27}{5} \cdot \frac{125}{3} =$
l) $\log_2 \sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{5} =$
m) $\log_3 \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{11} =$
n) $\log_7 \frac{1}{49} + \log_7 4 + \log_7 \sqrt[2]{2^5} =$
o) $\log_2 5$ - $\log_2 25 + 2\log_2 125 =$
p) $\log_4 \sqrt[3]{2}$ - $\log_4 \frac{1}{16} + \log_4 \sqrt[3]{64} =$
q) $\log_5 1 + \log_5 5 + \log_5 5^2 + \log_5 5^3 + \log_5 5^4 + \ldots + \log_5 5^{2015} =$
r) $\log_3 3$ - $\log_3 9 + \log_3 27$ - $\log_3 81 + \ldots + \log_3 4.783.969 =$
s) $\log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots + \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2015} =$
t) $\log_5 3 + 2\log_5 3 + 3\log_5 3 + 4\log_5 3 + \ldots + 2015\log_5 3 =$